Semana 3

- En la tercera semana se sugiere resolver los ejercicios 20 a 27 de la Guía 1.
- Se sugiere antes de resolver los ejercicios ver los videos de YouTube de los temas coorrespondientes así como también leer la bibliografía recomendada y el material teórico subido en el campus del curso.
- A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y algunas observaciones para resolver los ejercicios correspondientes a la semana 3. Los ejercicios propuestos que no están en la guía (pero que se relacionan con los mismos) no tienen numeración.

Subespacios fundamentales de una matriz

Antes de ponernos a resolver ejercicios de subespacios fundamentales de una matriz, recordemos su definición:

Definición. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ (es decir una matriz de $n \times m$ cuyas componentes son elementos de $\mathbb{K}$). Supongamos que $A = [A_1\ A_2\ \cdots\ A_m]$, donde $A_1, A_2, \cdots, A_m \in \mathbb{K}^n$ son las columnas de A. Se define:*

$$\text{El espacio nulo: } nul(A) = \{x \in \mathbb{K}^m : Ax = 0_{\mathbb{K}^n}\} \subseteq \mathbb{K}^m,$$

$$\text{El espacio columna: } col(A) = gen\{A_1, A_2, \cdots, A_m\} \subseteq \mathbb{K}^n,$$

$$\text{El espacio fila: } fil(A) = col(A^T) \subseteq \mathbb{K}^m.$$

Dada $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, observar que el rango de A, es decir el número de columnas (o filas) de A linealmente independientes (lo notamos $rg(A)$), coincide con la dimensión del subespacio $col(A)$. Es decir $rg(A) = \dim(col(A))$.

También recordemos el teorema de la dimensión que usaremos ampliamente en estos ejercicios.

Teorema 1. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Entonces,*

$$\dim(nul(A)) + rg(A) = m.$$

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y supongamos que estamos trabajando en el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Entonces,

$$\dim(nul(A)) + rg(A) = m.$$

Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ y supongamos que estamos trabajando en el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Entonces,

$$\dim(nul(A)) + rg(A) = 2m.$$

En el caso en que $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, para el teorema de la dimensión debemos discriminar en los casos en que estamos trabajando en el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Esto es así, porque en el primer caso, $\dim(\mathbb{C}^m_{\mathbb{C}}) = m$ y en el segundo caso $\dim(\mathbb{C}^m_{\mathbb{R}}) = 2m$ y eso se ve reflejado en dicho teorema. Se recomienda entender la prueba de este resultado leyendo la bibliografía.

La siguiente propiedad será útil para resolver los ejercicios de la semana 3 (especialmente los **Ejercicios 1.21 y 1.24**).

Proposición 1. *Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{K}^n$. Entonces si existe solución del sistema $Ax = b$, todas las soluciones x_s del sistema $Ax = b$ se pueden expresar como*

$$x_s = x_p + x_h,$$

donde x_p es una solución particular (es decir $Ax_p = b$) y $x_h \in nul(A)$ (es decir x_h es solucion del sistema homogéneo $Ax = 0$).

Dem. Primero veamos que efectivamente x_s resuelve el sistema $Ax = b$. Esto es así pues, $Ax_s = A(x_p + x_h) = Ax_p + Ax_h = b + 0 = b$.

Por útlimo, veamos que toda solución del sistema se puede escribir como queremos. Sea x_p una solución particular del sistema $Ax = b$ (que existe por hipótesis), entonces $Ax_p = b$. Por otra parte, supongamos que x_s es cualquier solución del sistema $Ax = b$. Entonces $Ax_s = b$. Restando estas dos ecuaciones, nos queda que $0 = b - b = Ax_s - Ax_p = A(x_s - x_p)$, entonces si llamamos $x_h := x_s - x_p$, claramente $x_h \in nul(A)$. Finalmente, $x_s = x_p + (x_s - x_p) = x_p + x_h$, con x_p una solución particular y $x_h \in nul(A)$, y obtenemos lo que queríamos probar. $\square$

El siguiente ejercicio parece sencillo a primera vista, pero requiere bastante atención.

Ejercicio 1.22: Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$. Hallar una base de cada uno de los cuatro subespacios fundamentales de A.

Sea $b = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 3+2i \end{bmatrix}$. Existe $x \in \mathbb{C}^2$ tal que $Ax = b$? Si la respuesta es afirmativa, hallar todas las soluciones del sistema $Ax = b$.

Dem. Primero vamos a obtener el subespacio $col(A)$.

Fácilmente vemos que $col(A) = gen\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \}$. La dificultad del ejercicio está en que no se aclara el cuerpo donde se está trabajando. Veremos que las respuestas serán distintas si tomamos como cuerpo $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Si pensamos a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, como $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}$, entonces $col(A) = gen\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \}$ y una base de $col(A)$ puede ser $B_{col(A)} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \}$. Por otra parte, si pensamos a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, no existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}$, por lo tanto el conjunto $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \}$ el LI y en este caso, una base de $col(A)$ puede ser $B_{col(A)} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \}$.

Para el calculo de $nul(A)$ también tendremos que pensar en esos dos casos.

Si pensamos a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, como en este caso $dim(\mathbb{C}^2_{\mathbb{C}}) = 2$, el teorema de la dimensión nos dice que $dim(nul(A)) + rg(A) = 2$. Entonces, $\dim(nul(A)) = 2 - rg(A) = 2 - 1 = 1$. Entonces, como (por ejemplo) el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \in nul(A)$, tenemos que $nul(A) = gen\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \}$ (por si no se entiende, como sabemos que la dimensión de $nul(A)$ es 1, basta con encontrar un vector (no nulo) que pertenezca a $nul(A)$ y entonces, el subespacio $nul(A)$ estará compuesto por todas las CL de dicho vector).

Otra forma de encontrar $nul(A)$ (en este caso donde pensamos a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial) es resolver el sistema homogéneo $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Conclusión, una base de $nul(A)$ podría ser $B_{nul(A)} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \}$.

Por otra parte, si pensamos a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial (recordemos que en este caso $\dim(\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}) = 4$), también por el teorema de la dimensión, tenemos que $\dim(nul(A)) = 4 - rg(A) = 4 - 2 = 2$. Entonces como $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \in nul(A)$ y además, como no existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, el conjunto $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \}$ es LI. Por lo tanto, una base de $nul(A)$ podría ser $B_{nul(A)} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \}$.

Otra forma de hallar $nul(A)$ cuando pensamos a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial es la siguiente: x pertenece a $nul(A)$ si $x \in \mathbb{C}^2$ y además $Ax = 0$. En este caso, una base de $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ puede ser $B_{\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \}$ y se ve claramente que $\dim(\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}) = 4$. Como $x \in \mathbb{C}^2$, existen $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$ tales que

$$x = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}.$$

Entonces, si $0 = Ax$ tenemos que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = A(a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}) = a \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Operando, nos queda el sistema $0 = a + bi + ci - d,\ 0 = ai - b - c - di$. Entonces, $b + c = (a - d)i$ y $(b + c)i = d - a$. **IMPORTANTE:** Observar que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ por lo que $b + c \in \mathbb{R}$ y $d - a \in \mathbb{R}$. Pero las ecuaciones anteriores nos indican que $b + c = (a - d)i$, entonces $b + c$ también es un número complejo puro (pues es igual al número real $a - d$ multiplicado por i), pero el único número que es real y complejo puro a la vez es 0. Por lo tanto $b + c = 0$, por lo que $c = -b$ y $d = a$.

Volviendo a la expresión de x, tenemos que $x = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} + (-b) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $nul(A) = gen\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \}$ y como esos generadores son LI, una base de $nul(A)$ podría ser $B_{nul(A)} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \}$.

Para obtener $fil(A)$ y $nul(A^T)$, observar que en este caso en particular (es decir en este ejercicio) $A^T = A$. Entonces $nul(A^T) = nul(A)$ y como $fil(A) = col(A^T)$, tenemos que $fil(A) = col(A) = gen\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \}$. Entonces, si pensamos a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, una base de $fil(A)$ puede ser $B_{fil(A)} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \}$ y una base de $nul(A^T)$ podría ser $B_{nul(A^T)} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \}$.

Si pensamos a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, una base de $fil(A)$ puede ser $B_{fil(A)} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \}$ y una base de $nul(A^T)$ podría ser $B_{nul(A^T)} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} \}$.

Finalmente, observar que $b = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 3+2i \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Entonces si llamamos $x_p := \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$, tenemos que $Ax_p = b$, es decir el sistema $Ax = b$ tiene al menos una solución (es compatible).

Cuando existe solución del sistema $Ax = b$, vimos en la Proposición 1, que todas las soluciones de dicho sistema se pueden expresar como $x_s = x_p + x_h$, donde x_p es una solución particular y $x_h \in nul(A)$. Entonces, si pensamos a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, todas las soluciones del sistema son $x_s = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, con $a \in \mathbb{C}$. Por otra parte, si pensamos a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, todas las soluciones del sistema son $x_s = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. $\square$

Ejercicio 1.24: Su resolución se encuentra en el campus.

A partir del ejercicio 1.24, tenemos otra manera de caracterizar el espacio $col(A)$.

Proposición 2. *Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Entonces*

$$col(A) = \{y \in \mathbb{K}^n : \text{ existe } x \in \mathbb{K}^m : y = Ax\} = \{Ax : x \in \mathbb{K}^m\}.$$

Dem. Vamos probar la doble inclusión, sea $y \in col(A)$, entonces, por el ejercicio 1.24, el sistema $Ax = y$ es compatible, es decir existe $x_0 \in \mathbb{K}^m$ tal que $y = Ax_0$, entonces $y \in \{y \in \mathbb{K}^n : \text{ existe } x \in \mathbb{K}^m : y = Ax\}$.

Reciprocamente, si $y \in \{y \in \mathbb{K}^n : \text{ existe } x \in \mathbb{K}^m : y = Ax\}$, entonces existe $x \in \mathbb{K}^m$ tal que $y = Ax$. Entonces el sistema es compatible y, por el ejericio 1.24, $y \in col(A)$. $\square$

Ejercicio de examen: Si $A \in \mathbb{R}^{5\times 4}$ es una matriz tal que $rg(A) = 4$ y $b \in \mathbb{R}^5$, entonces el sistema $Ax = b$ no tiene solución cuando la matriz ampliada del sistema $[A\ b] \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ es inversible.

Dem. Vamos a probar el contrarrecíproco de lo que queremos ver. Es decir, vamos a probar que si la matriz ampliada del sistema $[A\ b] \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ no es inversible, entonces el sistema $Ax = b$ tiene solución (es decir probaremos “no q entonces no p” por lo que también valdrá que “p entonces q”).

Supongamos que $A = [A_1\ A_2\ A_3\ A_4]$, donde $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}^5$ son las 4 columnas de A. Si la matriz ampliada del sistema $[A\ b] \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ no es inversible, eso significa que el conjunto $\{A_1, A_2, A_3, A_4, b\}$ (es decir, el conjunto de las columnas de la matriz ampliada $[A\ b]$) no es LI (ó lo que es lo mismo es LD). Pero como $4 = rg(A) = \dim(col(A))$, tenemos que el conjunto $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ (las columnas de A) es LI. Por lo tanto, la única posibilidad que queda es que b sea una CL de A_1, A_2, A_3, A_4 (si no están convencidos de esto, traten de meditarlo un poco). Es decir, existen $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$, tales que

$$b = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4 = [A_1\ A_2\ A_3\ A_4] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}.$$

Llamando $x_0 := \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Tenemos que $Ax_0 = b$, y el sistema es compatible. En conclusión probamos que si $[A\ b]$ es no inversible entonces el sistema $Ax = b$ tiene solución, por contrarrecíproco vale que si $Ax = b$ no tiene solución entonces $[A\ b]$ es inversible y probamos lo que queríamos. $\square$

El siguiente ejercicio puede ser útil para entender el ejercicio 1.27.

Ejercicio: Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$. Hallar B de tamaño adecuado tal que $nul(B) = col(A)$.

Observar que $col(A) = gen\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \} = gen\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \}$ y $\dim(col(A)) = rg(A) = 2$. Por otra parte como $nul(B) = col(A) \subseteq \mathbb{R}^4$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 4}$, donde n lo tendremos que proponer de manera razonable. Además, por el teorema de la dimensión, $rg(B) + \dim(nul(B)) = 4$, entonces $rg(B) = 4 - 2 = 2$. Por lo tanto $n \geq 2$. Un B posible, puede ser $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Observar que $rg(B) = 2$ y $nul(B) = col(A)$.

Pregunta: analizar por qué si $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, ese B no sirve.

Ejercicio de examen: Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Demostrar que:

a) $col(BA) \subseteq col(B)$. Además, si $rg(A) = m$ vale la igualdad, pero la recíproca no es cierta.

b) $nul(A) \subseteq nul(BA)$. Además, si $rg(B) = m$ vale la igualdad, pero la recíproca no es cierta.

c) $rg(BA) \leq min\{rg(A), rg(B)\}$.

Dem. $a)$: Para probar $col(BA) \subseteq col(B)$, tomemos $y \in col(BA)$ y veamos que $y \in col(B)$. Sea $y \in col(BA)$, entonces (por la Proposición 2) existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y = BAx = B(Ax)$; entonces si llamamos $x' := Ax \in \mathbb{R}^m$, claramente $y = Bx'$. Encontramos un vector x' tal que $y = Bx'$, entonces (por la misma proposición) $y \in col(B)$. Y probamos que $col(BA) \subseteq col(B)$.

Si $rg(A) = m$, entonces como $col(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ y $\dim(col(A)) = rg(A) = m$, tenemos que $col(A) = \mathbb{R}^m$ (usamos la propiedad que dice que dos subespacios son iguales si y sólo si uno está contenido en el otro y tienen misma dimensión). Entendida esta observación, veamos la otra inclusión. Sea

$y \in col(B)$ entonces, existe $x \in \mathbb{R}^m$ tal que $y = Bx$, pero como $x \in \mathbb{R}^m = col(A)$, existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $x = Az$, por lo tanto $y = Bx = B(Az) = (BA)z$ y tenemos que $y \in col(BA)$. Entonces probamos que $col(B) \subseteq col(BA)$ y como siempre vale la otra inclusión, en este caso, tenemos que $col(BA) = col(B)$.

La recíproca no vale. Es decir $col(BA) = col(B)$, no implica que $rg(A) = m$. De hecho, si tomamos $A = 0_{\mathbb{R}^{m\times n}}$, $B = 0_{\mathbb{R}^{p\times m}}$ tenemos que $col(B) = \{0_{\mathbb{R}^p}\}$ y $rg(A) = 0 \neq m$. Sin embargo, $col(BA) = col(0_{\mathbb{R}^{p\times n}}) = \{0_{\mathbb{R}^p}\} = col(B)$.

b) : Si $x \in nul(A)$ entonces $Ax = 0$. Entonces, $BAx = B(Ax) = B0 = 0$, por lo tanto $x \in nul(BA)$ y tenemos la inclusión $nul(A) \subseteq nul(BA)$.

Su $rg(B) = m$, por el teorema de la dimensión, tenemos que $\dim(nul(B)) = m - rg(B) = 0$. Entonces $nul(B) = \{0\}$. En este caso, veamos que tenemos la otra inclusión. Si $x \in nul(BA)$ entonces $0 = BAx = B(Ax)$. Entonces $Ax \in nul(B)$, pero como $nul(B) = \{0\}$, tenemos que $Ax = 0$ y por lo tanto $x \in nul(A)$. Entonces tenemos que $nul(BA) \subseteq nul(A)$ y como siempre vale la otra inclusión, concluimos que $nul(BA) = nul(A)$.

La recíproca no vale. Es decir $nul(BA) = nul(A)$, no implica que $rg(B) = m$. Observar que sirve el mismo ejemplo que usamos en *a*).

c) : Por el ítem *a*) tenemos que $col(BA) \subseteq col(B)$, entonces $rg(BA) = \dim(col(BA)) \leq \dim(col(B)) = rg(B)$. Por otra parte, por el ítem *b*), tenemos que $\dim(nul(A)) \leq \dim(nul(BA))$. Entonces, por el teorema de la dimensión, tenemos que $rg(BA) = n - \dim(nul(BA)) \leq n - \dim(nul(A)) = rg(A)$. Esto implica que $rg(BA) \leq min\{rg(A), rg(B)\}$.

Para enteder mejor por qué vale esto, observar que sólo tenemos dos opciones

$$min\{rg(A), rg(B)\} = rg(A) \text{ ó } min\{rg(A), rg(B)\} = rg(B).$$

Si, por ejemplo si $rg(A) < rg(B)$, tendremos la primera opción. Como vimos que $rg(BA) \leq rg(A)$ y $rg(BA) \leq rg(B)$, tenemos lo que queríamos probar. $\square$